Etkinlik No	1
Ders Adı	Matematik
Sınıf Düzeyi	9-12. Sınıflar
Etkinlik Adı	Metalik Oranlar
Süre	40’+40’+40’+40’
Strateji, Yöntem ve Teknikler	Buluş yoluyla öğretim, problem çözme, bilgisayar destekli öğretim.
Materyal/Araç Gereç	Bilgisayar/akıllı tahta, Geogebra, Excel programları, EK 1 formu, kalem.
Disiplinler arası Boyut	Bilişim Teknolojileri, Görsel Sanatlar.
Kazanımlar	1. Fibonacci dizisinden altın orana ulaşır. 2. Fibonacci dizisine benzer Pell dizisi gibi yeni diziler oluşturur. 3. Yeni dizilerden altın orana benzer yeni oranlara ulaşır. 4. Bulunan oranları geneller. 5. Yeni dizileri ve oranları modelleyecek şekiller oluşturur.
Hazır Bulunuşluk ve Ön Hazırlık	Öğrenci dizi kavramı ve Fibonacci dizisiyle ilgili genel bilgilere sahip olmalıdır. Ayrıca öğrenciler temel düzeyde Excel ve Geogebra programlarını kullanabilmelidir. Öğretmen etkinlik kâğıdını öğrenci sayısına göre çoğaltır. Akıllı tahta ya da bilgisayarda gerekli programlar açılır.
Öğrenme Öğretme Süreci	Öğrencilere “Fibonacci Dizisi” ve “Altın Oran” konusu hakkında bilgi sahibi olup olmadıkları, neler bildikleri sorulur. Bu aşamada etkinlik kâğıdının A bölümü öğrencilere verilebilir. Fibonacci Dizisi, $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ şeklinde yazılır. Öğrencilerden bu dizinin terimleri arasındaki ilişkiyi ifade etmeleri ve aşağıdaki gibi yazmaları beklenir: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Fibonacci dizisi ile altın oran arasındaki ilişkiyi gösterebilmek için öğrencilerden Fibonacci dizisindeki her bir terimi kendisinden önceki terime bölmeleri ve çıkan sonuçları arka arkaya yazmaları istenir. Bu işlem için Excel’den yararlanmaları önerilir.

	A	B
1	0	
2	1	
3	=A1+A2	
4		
5		
6		

	A	B
1	0	=A2/A1
2	1	
3	1	
4	2	
5	3	
6	5	
7	8	
8	13	
9	21	
10	34	

	A	B	C
1	0	#SAYI/0!	
2	1	1	
3	1	2	
4	2	1,5	
5	3	1,666666667	
6	5	1,6	
7	8	1,625	
8	13	1,615384615	
9	21	1,619047619	
10	34	1,617647059	
11	55	1,618181818	
12	89	1,617977528	
13	144	1,618055556	
14	233	1,618025751	
15	377	1,618037135	
16	610	1,618032787	
17	987	1,618034448	

Öğrencilere tablodaki B sütununda çıkan sonuçları incelemeleri ve dikkatlerini çeken bir şeyler olup olmadığı sorulur. Öğrencilerden Fibonacci dizisinin terimlerinin bir önceki terimlere oranlarının gittikçe birbirine ve 1,618 ile başlayan bir sayıya yaklaştığını ifade etmeleri beklenir. Öğrencilere altın oran hakkında hatırlatmalar yapılır: Altın oran, doğada ve sanatta güzelliğin estetiğin ölçüsü olarak kabul edilen bir sayıdır. Doğada birçok yerde görülüp keşfedildikten sonra, sanat eserlerinde de sıklıkla kullanılmıştır. Yaklaşık değeri 1,618 olan irrasyonel bir sayıdır.

Öğrencilerin B sütunundaki bu sayıların "altın oran"a doğru gittiğini fark etmeleri ve Fibonacci dizisi ile altın oran arasındaki ilişkiyi sezmeleri sağlanır. Öğrencilerden bu ilişkiden yararlanarak altın oranın gerçek değerine ulaşmaları beklenir, gerekli durumlarda yönlendirmeler yapılır. Sonuçta aşağıdaki gibi bir yol izlenerek altın orana karşılık gelen irrasyonel sayıya ulaşılır.

Fibonaaci dizisinin özelliğinden,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Yazılır. Denklemin her iki tarafı F_{n-1}'e bölünür:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

şeklindeki ikinci dereceden denkleme ulaşılır. Bu denklemin pozitif kökü,

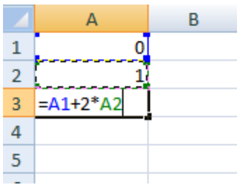
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803 \ldots$$

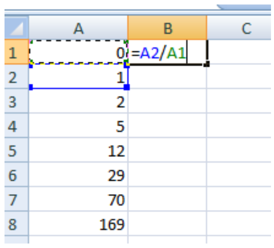
olarak bulunur. Buradan öğrenciler aynı zamanda altın oranın irrasyonel bir sayı olduğunu da görmüş olur.

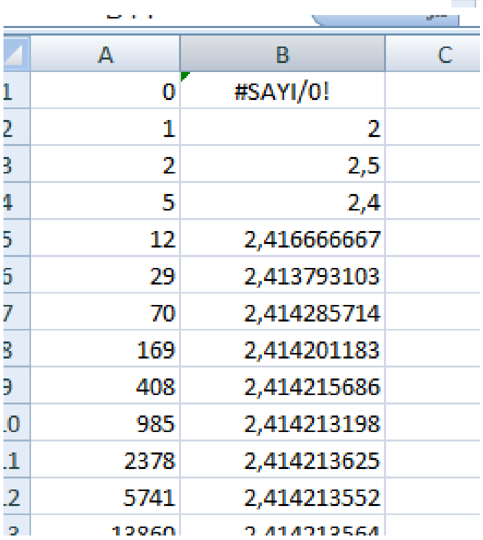
Ardından öğrencilere etkinlik formunun B bölümü verilir. Fibonacci dizisine benzer başka diziler oluşturup oluşturamayacakları sorulur. Daha sonra öğrencilerden başlangıç terimleri 0, 1 ve genel terimi P_n olmak üzere $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ kuralına uygun diziyi yazmaları istenir. Öğrencilerden aşağıdaki şekilde yazmaları beklenir:

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \ldots$$

Fibonacci dizisine benzer bir şekilde oluşturulan bu dizinin Pell dizisi olarak isimlendirildiği ifade edilir. Pell dizisinin de her bir terimi bir önceki terime bölündüğünde ne olabileceği öğrencilere sorulur. Öğrencilerden tahminlerde bulunmaları beklenir. Öğrencilere Excel programından yararlanarak Pell dizisinin terimlerini bir önceki terimlerine bölmeleri söylenir.



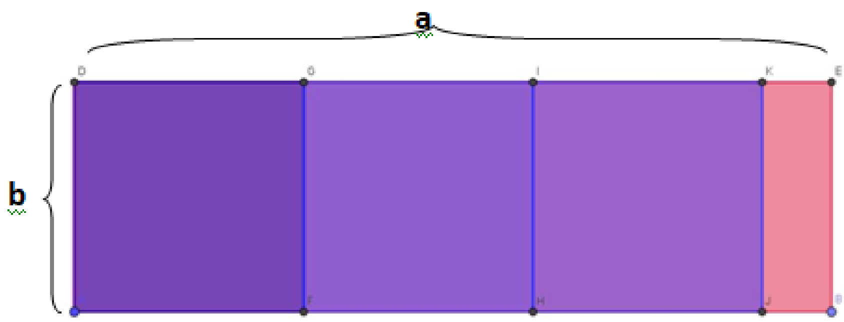




	A	B	C
1	0	#SAYI/0!	
2	1	2	
3	2	2,5	
4	5	2,4	
5	12	2,416666667	
6	29	2,413793103	
7	70	2,414285714	
8	169	2,414201183	
9	408	2,414215686	
10	985	2,414213198	
11	2378	2,414213625	
12	5741	2,414213552	

Öğrencilere tablodaki B sütununda çıkan sonuçları incelemeleri ve dikkatlerini çeken bir şeyler olup olmadığı sorulur. Öğrencilerden

	Pell dizisinin terimlerinin bir önceki terimlere oranlarının gittikçe birbirine ve 1,414 ile başlayan bir sayıya yaklaştığını ifade etmeleri beklenir. Yaklaşılan bu sayıya "gümüş oran" denir. Öğrencilerin Pell dizisi ile gümüş oran arasındaki ilişkiyi sezmeleri sağlanır. Öğrencilerden bu ilişkiden yararlanarak gümüş oranın gerçek değerine ulaşmaları beklenir, gerekli durumlarda yönlendirmeler yapılır. Sonuçta aşağıdaki gibi bir yol izlenerek gümüş orana karşılık gelen irrasyonel sayıya ulaşılır. Pell dizisinin özelliğinden; $$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$ eşitliği sağlanır. Bu eşitliğim her iki tarafı P_{n-1}'e bölünür: $$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{2P_{n-1} + P_{n-2}}{P_{n-1}} = 2 + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}}$$ Gümüş oranı δ sembolü ile gösterelim. Buna göre n yeterince büyük bir doğal sayı iken aşağıdaki eşitlik yazılabilir: $$\delta = 2 + \frac{1}{\delta}$$ Buradan ikinci dereceden bir denklem elde edilir ve denklemin pozitif kökü bulunur: $$\delta = \sqrt{2} + 1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2}$$ Öğrencilere etkinlik formunun C bölümü verilerek öğrencilerden yukarıdakilere benzer şekilde $T_n = 3T_{n-1} + T_{n-2}$ kuralı ile 3-Fibo dizisini oluşturmaları söylenir. Buradan da yeni bir oran elde edip edilemeyeceği üzerinde çalışmaları istenir. Öğrencilerden aşağıdaki aşamaları izlemeleri beklenir: Dizinin terimleri; $0, 1, 3, 10, 33, 109, \ldots$ Bu dizide geçerli olan kural; $T_n = 3T_{n-1} + T_{n-2}$ $$\frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{3T_{n-1} + T_{n-2}}{T_{n-1}} = 3 + \frac{T_{n-2}}{T_{n-1}}$$ n yeterince büyük bir doğal sayı iken $\frac{T_n}{T_{n-1}}$ oranına bronz oran diyelim ve sembolü ω olsun: $$\omega = 3 + \frac{1}{\omega}$$ $$\omega = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$ Öğrencilere etkinlik formunun D bölümü verilir. Bu bölümde öğrencilere aynı yöntemle yeni diziler ($a_n = k.a_{n-1} + a_{n-2},\ k \in Z^+$ şeklinde) oluşturulduğunda yine benzer oranlar elde edilip edilemeyeceği sorulur. Öğrencilerin tahminleri dinlenir. Daha sonra daha önce elde edilen oranların verildiği tabloyu inceleyerek ve daha önce yapılan işlemleri $k \in Z^+$ için tekrarlayarak k-Fibo genel dizisi için k cinsinden aşağıdaki orana ulaşmaları beklenir.

	$\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ En sonunda etkinlik formunun E bölümü verilir. Altın oran kullanılarak elde edilen altın dikdörtgen ve özelliği hatırlatılır. Öğrencilerden benzer şekilde gümüş ve bronz dikdörtgen oluşturmaları beklenir. Bu dikdörtgenleri oluşturabildikleri takdirde altın dikdörtgenle ve birbirleriyle karşılaştırmaları istenir. Öğrencilere bu konuda çalışmaları için süre verilir. Sonunda öğrencilerden kenar uzunlukları oranı gümüş oranı veren bir dikdörtgen oluşturulduğunda ve bu dikdörtgenden kenar uzunluğu dikdörtgenin kısa kenarı kadar olan iki adet kare çıkarıldığında geriye kalan dikdörtgenin yine bir gümüş dikdörtgen olduğunu sözle ve matematiksel olarak ifade etmeleri beklenir. Benzer şekilde kenar uzunlukları oranı bronz oranı veren bir dikdörtgen oluşturulduğunda ve bu dikdörtgenden kenar uzunluğu dikdörtgenin kısa kenarı kadar olan üç adet kare çıkarıldığında geriye kalan dikdörtgenin yine bir bronz dikdörtgen olduğunu sözle ve matematiksel olarak ifade etmeleri beklenir. Bronz dikdörtgen için:  $\omega = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a-3b}$ olur.
Ölçme ve Değerlendirme	EK 2 formu.
Kaynakça	Kaynak: Numberphile (11 Mayıs 2018). *The silver ratio* [Video] Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=7lRgeTmxnlg

EK 1: ETKİNLİK KÂĞIDI

Sevgili öğrenciler, etkinlik formunda verilen adımların sırasıyla takip edilmesi gerekmektedir. Bir bölüm tamamlanmadan ve öğretmeninizin talimatını duymadan sonraki bölüme geçmeyiniz.

A)

1. Fibonacci Dizisi'yle ilgili neler hatırlıyorsunuz? Aşağıya Fibonacci dizisini yazabilir misiniz?

2. Fibonacci dizisinin terimleri arasında nasıl bir ilişki var? Bu ilişkiyi dizinin genel terimleri (F_n)cinsinden ifade edebilir misiniz?

3. Bir Excel dosyası açalım ve ilk sütuna (A sütunu) Fibonacci dizisinin terimlerini yazalım. (Kolaylık: İlk iki terimi yazdıktan sonra üçüncü satıra =A1+A2 komutunu yazıp hesaplatabilirsiniz. Sonra bu son hücrenin sağ alt köşesinden tutup aşağı doğru çektiğinizde diğer terimler otomatik hesaplanacaktır. Bu şekilde en az ilk 20 satırı oluşturun.)

4. B sütununa ise dizinin her bir terimin bir önceki terime bölümünden elde edilen sonucu yazınız. Örneğin B1 hücresine A2 hücresindeki sayının A1 hücresindeki sayıya oranını yazınız. (Kolaylık: B1 hücresine =A2/A1 yazıp hesaplama yaptırdıktan sonra bu hücrenin sağ alt köşesinden tutup aşağı doğru çekerseniz sütundaki diğer değerleri de bulabilirsiniz.)

Tablodaki B sütununda çıkan sonuçları inceleyiniz. Dikkatinizi çeken şeyler var mı?

5) Peki Fibonacci dizisinden yararlanarak φ ile gösterdiğimiz altın oranın tam olarak neye eşit olduğunu nasıl bulabiliriz?

6) Altın oran değerini ikinci dereceden bir denklemin kökü olarak bulunuz.

B)

1. Fibonacci dizisinin oluşum kuralına benzer şekilde oluşturulmuş yeni diziler yazabilir misiniz? Aklınıza gelenleri kuralıyla birlikte aşağıya yazınız.

2. Bilindiği gibi Fibonacci dizisinde ilk terimler 0 ve 1 olmak üzere sonraki terimlerin her biri önceki iki terimin toplanmasıyla elde edilmektedir. Fibonacci dizisine benzer başka bir dizi (2-Fibo Dizisi) yazalım. Öyle ki bu dizide her bir terim kendinden bir önceki terimin iki katı ile ondan önceki terimin toplamına eşit olsun (İlk iki terim yine 0 ve 1 olsun). Aşağıya bu diziyi yazınız.

3. 2-Fibo dizisinin terimleri arasında nasıl bir ilişki var? Bu ilişkiyi dizinin genel terimleri (P_n)cinsinden ifade edebilir misiniz?

4. Bu dizinin her bir terimini de bir önceki terime böldüğümüzde ne olur sizce?

5. Bir Excel dosyası açalım ve ilk sütuna (A sütunu) 2-Fibo dizisinin terimlerini yazalım. (Kolaylık: İlk iki terimi yazdıktan sonra üçüncü satıra =A1+2*(A2) komutunu yazıp hesaplatabilirsiniz. Sonra bu son hücrenin sağ alt köşesinden tutup aşağı doğru çektiğinizde diğer terimler otomatik hesaplanacaktır. Bu şekilde en az ilk 20 satırı oluşturun.)

6. B sütununa ise dizinin her bir terimin bir önceki terime bölümünden elde edilen sonucu yazınız. Örneğin B1 hücresine A2 hücresindeki sayının A1 hücresindeki sayıya oranını yazınız. (Kolaylık: B1 hücresine =A2/A1 yazıp hesaplama yaptırdıktan sonra bu hücrenin sağ alt köşesinden tutup aşağı doğru çekerseniz sütundaki diğer değerleri de bulabilirsiniz.)

Tablodaki B sütununda çıkan sonuçları inceleyiniz. Dikkatinizi çeken şeyler var mı?

7) Peki 2-Fibo dizisinden yararlanarak $\boldsymbol{\delta}$ ile gösterdiğimiz gümüş oranın tam olarak neye eşit olduğunu nasıl bulabiliriz?

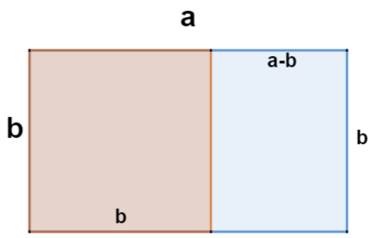
8) Gümüş oran değerini ikinci dereceden bir denklemin kökü olarak bulunuz.

C) Şimdi de Şimdi de yukarıdakilere benzer şekilde 3-bonacci dizisini oluşturalım. Öyle ki bu dizide her bir terim kendinden bir önceki terimin üç katı ile ondan önceki terimin toplamına eşit olsun. Önceki iki diziye uyguladığımız süreçleri bu diziye de uygulayarak sabit bir oran (bulursak Bronz oran diyelim) bulmaya çalışalım.

D) Görüldüğü gibi Fibonacci dizisinin terimleri arasındaki ilişkiyi kullanarak altın oran değerine ulaştık. Fibonacci dizisine benzer şekilde yeni diziler türeterek gümüş oran ve bronz oranı elde ettik. Aynı yöntemle yeni diziler ($a_n = k.a_{n-1} + a_{n-2}$, $k \in Z^+$ şeklinde) oluşturduğumuzda yine benzer oranlar elde edebilir miyiz sizce? Elde edebilirsek bu oranlar için genel bir formül oluşturulabilir mi?

Fibonacci Dizisi Altın Oran	2-Fibo (Pell) Dizisi Gümüş Oran	3-Fibo Dizisi Bronz Oran	...	k-Fibo Dizisi Metalik Oranlar
$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\delta = \frac{2+\sqrt{8}}{2}$	$\omega = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$	...	?

E) Kenar uzunlukları oranı altın oranı veren altın dikdörtgenden bir kare çıkardığımızda geriye kalan küçük dikdörtgen de bir altın dikdörtgen oluyordu.



$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Benzer şekilde gümüş dikdörtgen veya bronz dikdörtgende de yapabilir miyiz? Böylesi dikdörtgenleri oluşturmaya çalışınız ve oluşturabilirseniz altın dikdörtgenle kıyaslayınız. Bunun için Geogebra’dan faydalanabilirsiniz.

EK 2: ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME FORMU

Ad: **Soy ad:**

Sevgili öğrenciler, etkinlikte keşfettiğiniz bilgiler ve sonuçlar doğrultusunda aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

- Altın oranla oluşturulan spiralleri doğada birçok yerde görmekteyiz. Gümüş oran ve bronz oran gibi metalik oranlarla spiraller oluşturulabilir mi? Oluşursa bu spiraller nerde karşımıza çıkabilir?

- Metalik oranların başka benzer özellikleri neler olabilir?

- Başlangıç terimleri 0,1 olmak üzere $a_n = k.a_{n-1} + a_{n-2},\ k \in Z^+$ şeklindeki k-Fibo genel dizilerinde elde edilen metalik oranların $\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayınız.